Keywords: generally periodical solutions; distributed computing.

Пчелинцев Александр Николаевич
аспирант
Тамбовский государственный
технический университет
Россия, Тамбов
e-mail: pchela9091@rambler.ru

Aleksander Pchelintsev
post-graduate student
Tambov State
Technical University
Russia, Tambov
e-mail: pchela9091@rambler.ru

УДК 517.911, 517.93

СТАТИСТИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ [1]

© Л. И. Родина, Е. Л. Тонков

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, множество достижимости, инвариантность.

Аннотация: В терминах функций Ляпунова получены условия, позволяющие оценивать относительную частоту пребывания множества достижимости управляемой системы в заранее заданном множестве. Исследуются статистически инвариантные и статистически слабо инвариантные множества относительно управляемой системы.

В этом докладе сообщается о результатах исследования статистически инвариантных множеств, опубликованных в $[1, 2]$, и рассмотрен ряд новых задач, связанных со свойствами статистических характеристик асимптотического поведения множеств достижимости управляемых систем.

Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t). Это означает, что на полном метрическом пространстве Σ задана *однопараметрическая группа преобразований* h^t пространства Σ в себя, непрерывная по (t, σ) и удовлетворяющая начальному условию $h^t\sigma|_{t=0} = \sigma$. Для заданного множества $U \subset \mathbb{R}^m$ рассмотрим пространство с мерой $(U, \mathfrak{A}, \eta)$, где $\mathfrak{A}$ — борелевская сигма-алгебра подмножеств U, η — мера Радона, сосредоточенная на множестве U. Мерой Радона с носителем U называется конечная регулярная счетно-аддитивная функция $\eta : A \to \mathbb{R}$ множеств $A \in \mathfrak{A}$.

Пусть задана непрерывная функция $f(\sigma, x, u)$ переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Мы рассматриваем управляемую систему

$$\dot{x} = \int_U f(h^t\sigma, x, u)\eta_t(du), \qquad (7)$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН №29 «Математическая теория управления».

порожденную динамической системой (Σ, h^t) и функцией f.

Допустимым процессом управляемой системы при каждом $\sigma \in \Sigma$ называется всякая функция $t \to \big(\varphi(t,\sigma), \eta_t\big)$ такая, что управление $t \to \eta_t$ является измеримой по Лебегу мерозначной функцией со значениями в пространстве вероятностных мер Радона с носителем U, функция $t \to \varphi(t,\sigma)$ является абсолютно непрерывным решением системы (7).

По функции f и множеству U построим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co}\{y \in \mathbb{R}^n : y = f(\sigma, x, u),\, u \in U\}, \tag{8}$$

где $\operatorname{co} G$ — замыкание выпуклой оболочки множества G.

Для каждого $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и момента времени $t \geqslant 0$ обозначим через $A(t,\sigma,X)$ множество достижимости системы (7) в момент t из начального множества X. Предположим, что задана непрерывная функция $\mathbb{A} : \mathbb{R} \times \Omega \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ переменных (t,ω), где $\omega = (\sigma, X)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\mathbb{A}(t,\omega)\big|_{t=0} = X, \quad \mathbb{A}(t+s,\omega) = \mathbb{A}\big(t, h^s\sigma, \mathbb{A}(s,\omega)\big), \quad t,s \in \mathbb{R}_+. \tag{9}$$

Для фиксированного множества $X_0 \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим множество

$$\alpha(\vartheta,\omega) \doteq \{t \in [0,\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq \mathbb{A}(t,\omega_0)\}, \quad \omega_0 = (\sigma, X_0).$$

Характеристику $\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim\limits_{\vartheta\to\infty} \dfrac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\omega)}{\vartheta}$ будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (7) заданным множеством $\mathbb{A}(t,\omega_0)$. Если указанный предел не существует, то рассматриваются характеристики $\operatorname{freq}^*(\omega)$ и $\operatorname{freq}_*(\omega)$ — верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (7) множеством $\mathbb{A}(t,\omega_0)$. Обозначим

$$\mathfrak{A}(\sigma) \doteq \big\{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{A}(t,\omega_0)\big\}, \quad \omega_0 = (\sigma, X_0),$$

$$\mathfrak{A}^r(\sigma) \doteq \big\{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n : \rho_{\mathbb{R}^n}\big(x, \mathbb{A}(t,\omega_0)\big) \leqslant r(t,\sigma)\big\}, \quad \mathfrak{B}^r(\sigma) \doteq \mathfrak{A}^r(\sigma) \setminus \mathfrak{A}(\sigma),$$

где $r(t,\sigma)$ — неотрицательная непрерывная функция переменных $(t,\sigma) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma$.

Скалярная функция $V(t,\sigma,x)$ называется *функцией Ляпунова* в области $\mathfrak{A}^r(\sigma)$, если она локально липшицева по (t,x) равномерно относительно σ на Σ и для каждого $\sigma \in \Sigma$ выполнены условия: $V(t,\sigma,x) \leqslant 0$ при всех $(t,x) \in \mathfrak{A}(\sigma)$, $V(t,\sigma,x) > 0$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{B}^r(\sigma)$.

Обозначим через $V^o(t,\sigma,x;q)$ обобщенную производную функции $V(t,\sigma,x)$ в точке (t,x) по направлению вектора $(1,q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, через $V^o_{\max}(t,\sigma,x) \doteq \max_{q\in F(h^t\sigma,x)} V^o(t,\sigma,x;q)$ — *верхнюю производную* функции V в силу включения (8).

Т е о р е м а 1. *Фиксируем множества $X_0, X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, $X \subseteq X_0$, функцию $\mathbb{A}(t,\omega_0)$, где $\omega_0 = (\sigma, X_0)$, удовлетворяющую условиям (9) и множество достижимости $A(t,\omega)$ системы (7), $\omega = (\sigma, X)$. Пусть существуют непрерывные скалярные функции $V(t,\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ переменных $(t,\sigma,x) \in \mathbb{R}_+ \times \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и $(\sigma,z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ такие, что:*

1. *Для каждого σ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи*

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

определено при всех $t \geqslant 0$.

2. *Для каждого $\sigma \in \Sigma$ бесконечно большая функция $V(t,\sigma,x)$ является функцией Ляпунова в области $\mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$, где $r = r(t,\sigma) \doteq \max\{z^*(t,\sigma), 0\}$, и при всех $(t,x) \in \mathfrak{A}^{1+r}(\sigma)$ выполнено неравенство $V^o_{\max}(t,\sigma,x) \leqslant w\big(h^t\sigma, V(t,\sigma,x)\big)$.*

Тогда множество достижимости $A(t,\omega)$ *существует для всех* $t \geqslant 0$*, и для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *выполнены неравенства* $\operatorname{freq}^*(\omega) \geqslant \varkappa^*(\sigma)$, $\operatorname{freq}_*(\omega) \geqslant \varkappa_*(\sigma)$*, где*

$$\varkappa^*(\sigma) \doteq \overline{\lim}_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}, \ \varkappa_*(\sigma) \doteq \underline{\lim}_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta] : z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Также получены условия, при которых множество $\mathfrak{A}(\sigma)$ является *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (7). Это означает, что для любой точки $x_0 \in X_0$ найдется такое решение $\varphi(t,\sigma)$ включения (8), что $\varphi(t,\sigma)$ определено при всех $t \geqslant 0$, $\varphi(0,\sigma) = x_0$ и верхняя относительная частота попадания данного решения в множество $\mathbb{A}(t,\omega_0)$ равна единице.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панасенко Е. А., Тонков Е. Л.* Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202-221.
2. *Родина Л.И., Тонков Е.Л.* Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 3.

Abstract: In the terms of Lyapunov functions we obtain the conditions that allow to estimate the relative frequency of occurrence of the attainable set of a controllable system in a given set. We investigate the statistically invariant and statistically weak invariant sets with respect to controllable system.
Keywords: controllable systems, dynamical systems, differential inclusions, attainable set, invariance.

Родина Людмила Ивановна
к. ф.-м. н., доцент
Удмуртский государственный университет
Россия, Ижевск
e-mail: rdl@uni.udm.ru

Ludmila Rodina
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Udmurtian Stste University
Russia, Izhevsk
e-mail: rdl@uni.udm.ru

Тонков Евгений Леонидович
д. ф.-м. н., профессор
Удмуртский государственный университет
Россия, Ижевск
e-mail: eltonkov@udm.ru

Eugeniy Tonkov
doctor of phys.-math. sciences, professor
Udmurtian Stste University
Russia, Izhevsk
e-mail: eltonkov@udm.ru